Calculs de limites

Exercice 1: Déterminer les limites suivantes

1. $l : x \mapsto \dfrac{x^5 - x}{x^2 - 1}$ en $+\infty$
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$
3. $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
4. $h : x \mapsto x^x$ en 0^+
5. $p : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{5x}$ en 0
6. $k : x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
7. $m : x \mapsto \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}$ en $+\infty$
8. $r : x \mapsto \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$

Exercice 2: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodique et admettant une limite en $+\infty$.
Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Prolongement par continuité

Exercice 3:

1. Soit $f : x \mapsto x\lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit $f : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?
   [**] Tracer la représentation graphique de f sur $[0;1]$.

Exercice 4: *Limites et fonction sinus*

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Soit $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que la fonction f peut être prolongée par continuité en 0.

Continuité

Exercice 5: Soit g définie sur $[0,1]$ par

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g en 0.
2. Tracer la représentation graphique de g sur $[0;1]$.

Exercice 6: Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
2. $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$

Exercice 7: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 8:</u> Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leqslant b$.

1. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$ et continue sur $[a,b]$.
   Montrer que : $\exists\, c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

2. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que : $\exists! c\in\mathbb{R}$ tel que $f(c)=c$.

<u>Exercice 9:</u> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$$

Montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 10:</u> Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 11:</u> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 12:</u> Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sup(f(x),g(x))=\frac{1}{2}\Big(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\Big)$$

2. Montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 13:</u>

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $k\in\mathbb{R}_+^*$.
   On suppose que f est <u>k-lipschitzienne sur I</u> i.e.

$$\forall (x,y)\in I^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$

   Montrer que f est continue sur I.

2. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction k-lipschitzienne avec $k\in]0,1[$.
   (a) Montrer que $\exists! c\in[0;+\infty[,\ f(c)=c$.
   (b) Montrer que la suite (u_n), définie par $u_0\in[0;+\infty[$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, converge vers c.

<u>Exercice 14:</u> Déterminer l'ensemble des fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)^2=f(x)$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)+f(x)=0$

<u>Exercice 15:</u> Soit $f: x\mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ définie sur $]0,1[$.

1. Montrer que f est bijective sur $]0,1[$ à valeurs dans un intervalle à préciser.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.